RESOLUÇÕES E RESPOSTAS

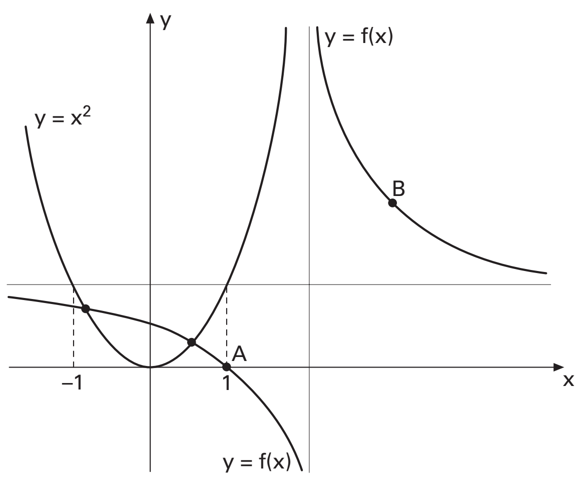
QUESTÃO 1:

a) De f(3) = 2, temos $a + \dfrac{1}{3-b} = 2$ e, de f(1) = 0, temos $a + \dfrac{1}{1-b} = 0$. Subtraindo membro a membro, temos $a + \dfrac{1}{3-b} - a - \dfrac{1}{1-b} = 2$, ou $\dfrac{1}{3-b} - \dfrac{1}{1-b} = 2$ e $(1-b) - (3-b) = 2(1-b)(3-b)$, ou seja, $b^2 - 4b + 4 = 0$.

Logo, b = 2 e, como $a + \dfrac{1}{1-b} = 0$, temos a = 1.

Resposta: a = 1; b = 2

b) Com $-1 < x < 1$, as curvas dadas pelas equações $y = 1 + \dfrac{1}{x-2}$ e $y = x^2$ interceptam-se em, exatamente, dois pontos distintos.



Resposta: 2

QUESTÃO 2:

a) A quantidade vendida é máxima para $\cos\left(\dfrac{\pi \cdot t}{6}\right) = 1$ e mínima para $\cos\left(\dfrac{\pi \cdot t}{6}\right) = -1$.

Assim:

$$\begin{cases} A + B = 2400 \\ A - B = 1600 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos A = 2000 e B = 400.

Resposta: A = 2000 e B = 400

RESOLUÇÕES E RESPOSTAS

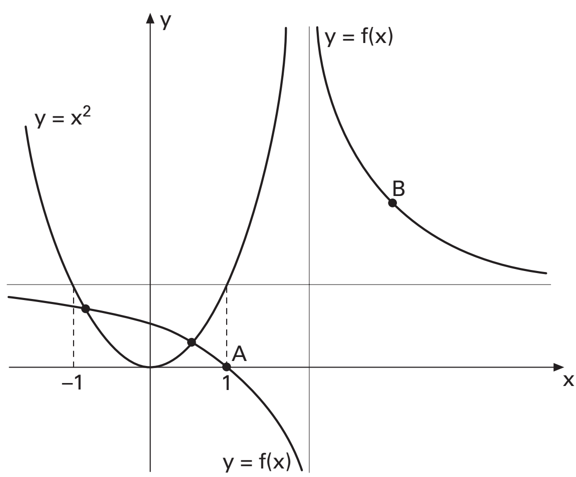
QUESTÃO 1:

a) De f(3) = 2, temos $a + \dfrac{1}{3 - b} = 2$ e, de f(1) = 0, temos $a + \dfrac{1}{1 - b} = 0$. Subtraindo membro a membro, temos $a + \dfrac{1}{3 - b} - a - \dfrac{1}{1 - b} = 2$, ou $\dfrac{1}{3 - b} - \dfrac{1}{1 - b} = 2$ e $(1 - b) - (3 - b) = 2(1 - b)(3 - b)$, ou seja, $b^2 - 4b + 4 = 0$.

Logo, b = 2 e, como $a + \dfrac{1}{1 - b} = 0$, temos a = 1.

Resposta: a = 1; b = 2

b) Com $-1 < x < 1$, as curvas dadas pelas equações $y = 1 + \dfrac{1}{x - 2}$ e $y = x^2$ interceptam-se em, exatamente, dois pontos distintos.



Resposta: 2

QUESTÃO 2:

a) A quantidade vendida é máxima para $\cos\left(\dfrac{\pi \cdot t}{6}\right) = 1$ e mínima para $\cos\left(\dfrac{\pi \cdot t}{6}\right) = -1$.

Assim:

$$\begin{cases} A + B = 2400 \\ A - B = 1600 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos A = 2000 e B = 400.

Resposta: A = 2000 e B = 400

b) Do enunciado temos:

$$2000 + 400 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = 1800 \quad \therefore \quad \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

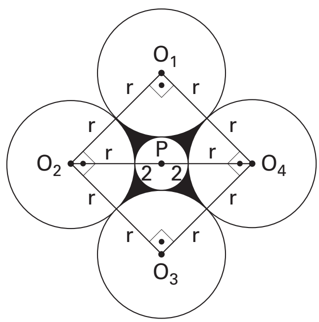
A menor solução positiva para essa equação ocorre quando $\frac{\pi \cdot t}{6} = \frac{2\pi}{3}$ e, portanto, t = 4.

Assim, o primeiro mês em que a quantidade vendida será de 1800 unidades é o mês de abril de 2010.

Resposta: Abril

QUESTÃO 3:

a) Do enunciado, temos a figura:



O_1, O_2, O_3, O_4 — centros das circunferências externas
P — centro da circunferência C

Como $\overline{O_2O_4}$ é diagonal do quadrado $O_1O_2O_3O_4$, temos:

$$O_1O_2 \cdot \sqrt{2} = O_2O_4$$
$$2r \cdot \sqrt{2} = 2r + 4 \quad \therefore \quad r = 2(\sqrt{2} + 1)$$

Resposta: $2(\sqrt{2} + 1)$

b) Sendo

- S_1: área do quadrado $O_1O_2O_3O_4$;
- S_2: área de cada um dos 4 setores circulares de ângulo central 90°, contidos nos círculos externos;
- S_3: área do círculo limitado pela circunferência C;

temos que a área S da região destacada é:

$$S = S_1 - 4 \cdot S_2 - S_3$$

$$S = (2r)^2 - 4 \cdot \frac{\pi r^2}{4} - \pi \cdot 2^2$$

Como $r = 2(\sqrt{2} + 1)$, então $S = 8(6 + 4\sqrt{2} - 2\pi - \sqrt{2}\pi)$.

Resposta: $8(6 + 4\sqrt{2} - 2\pi - \sqrt{2}\pi)$

QUESTÃO 4:

a) Fazendo y = 0 na equação da reta r, temos:

$$4x + 2 \cdot 0 + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{5}{4} \quad \therefore \quad A = \left(-\frac{5}{4}, 0\right)$$

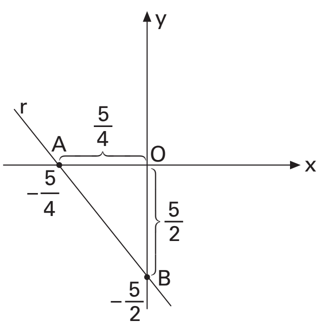
Resposta: $A = \left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

b) Fazendo x = 0 na equação da reta r, temos:

$$4 \cdot 0 + 2y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{5}{2} \quad \therefore \quad B = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$$

Resposta: $B = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$

c) Dos itens anteriores, temos a figura:



A área S pedida é tal que:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{2} \quad \therefore \quad S = \frac{25}{16}$$

Resposta: $\frac{25}{16}$

QUESTÃO 5:

a) Podemos representar os três marcos por (ab), (ba) e (a0b). Temos, na mesma ordem, os números 10a + b, 10b + a e 100a + b. Como as distâncias entre esses marcos são iguais, temos (10b + a) – (10a + b) = (100a + b) – (10b + a) e:

$$9b - 9a = 99a - 9b$$
$$18b = 108a$$

Logo, b = 6a.

Como a e b são algarismos não nulos, podemos concluir que a = 1 e b = 6.

Resposta: 16

b) Os primeiros três marcos são 16, 61 e 106. Como a velocidade é constante, podemos afirmar que o motorista anda 45 km a cada meia hora, ou seja, 15 km a cada 10 minutos. Portanto, no quarto marco há o número 121 (= 106 + 15).

Resposta: 121

QUESTÃO 6:

a) Podemos dispor os seis amigos nas poltronas de $6! = 720$ modos. Com Daniel e Laura juntos temos $5! \cdot 2! = 240$ modos (5! maneiras de permutarmos os quatro restantes com o bloco formado por Daniel e Laura e ainda 2! maneiras de permutarmos os dois dentro do bloco).
Assim, o número de modos com a condição de que Daniel e Laura não fiquem juntos em hipótese alguma é $720 - 240 = 480$.

Resposta: 480

b) Colocando um deles (Daniel ou Laura) no táxi pequeno, restam 4 possibilidades para a outra vaga; o outro táxi é preenchido pelo restante do grupo. Assim, temos:

$$2 \cdot 4 = 8 \text{ modos}$$

Resposta: 8

b) Do enunciado temos:

$$2000 + 400 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = 1800 \quad \therefore \quad \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

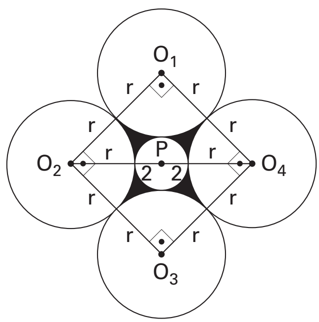
A menor solução positiva para essa equação ocorre quando $\frac{\pi \cdot t}{6} = \frac{2\pi}{3}$ e, portanto, $t = 4$.

Assim, o primeiro mês em que a quantidade vendida será de 1800 unidades é o mês de abril de 2010.

Resposta: Abril

QUESTÃO 3:

a) Do enunciado, temos a figura:



O_1, O_2, O_3, O_4 — centros das circunferências externas
P — centro da circunferência C

Como $\overline{O_2O_4}$ é diagonal do quadrado $O_1O_2O_3O_4$, temos:

$$O_1O_2 \cdot \sqrt{2} = O_2O_4$$
$$2r \cdot \sqrt{2} = 2r + 4 \quad \therefore \quad r = 2(\sqrt{2} + 1)$$

Resposta: $2(\sqrt{2} + 1)$

b) Sendo

- S_1: área do quadrado $O_1O_2O_3O_4$;
- S_2: área de cada um dos 4 setores circulares de ângulo central 90°, contidos nos círculos externos;
- S_3: área do círculo limitado pela circunferência C;

temos que a área S da região destacada é:

$$S = S_1 - 4 \cdot S_2 - S_3$$
$$S = (2r)^2 - 4 \cdot \frac{\pi r^2}{4} - \pi \cdot 2^2$$

Como $r = 2(\sqrt{2} + 1)$, então $S = 8(6 + 4\sqrt{2} - 2\pi - \sqrt{2}\pi)$.

Resposta: $8(6 + 4\sqrt{2} - 2\pi - \sqrt{2}\pi)$

QUESTÃO 4:

a) Fazendo y = 0 na equação da reta r, temos:

$$4x + 2 \cdot 0 + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{5}{4} \quad \therefore \quad A = \left(-\frac{5}{4}, 0\right)$$

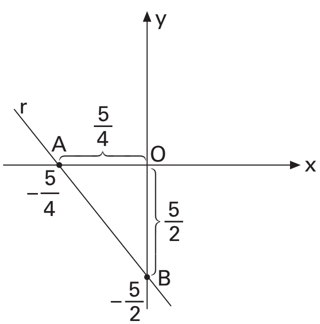
Resposta: $A = \left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

b) Fazendo x = 0 na equação da reta r, temos:

$$4 \cdot 0 + 2y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{5}{2} \quad \therefore \quad B = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$$

Resposta: $B = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$

c) Dos itens anteriores, temos a figura:



A área S pedida é tal que:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{2} \quad \therefore \quad S = \frac{25}{16}$$

Resposta: $\frac{25}{16}$

QUESTÃO 5:

a) Podemos representar os três marcos por (ab), (ba) e (a0b). Temos, na mesma ordem, os números 10a + b, 10b + a e 100a + b. Como as distâncias entre esses marcos são iguais, temos (10b + a) – (10a + b) = (100a + b) – (10b + a) e:

$$9b - 9a = 99a - 9b$$
$$18b = 108a$$

Logo, b = 6a.

Como a e b são algarismos não nulos, podemos concluir que a = 1 e b = 6.

Resposta: 16

b) Os primeiros três marcos são 16, 61 e 106. Como a velocidade é constante, podemos afirmar que o motorista anda 45 km a cada meia hora, ou seja, 15 km a cada 10 minutos. Portanto, no quarto marco há o número 121 (= 106 + 15).

Resposta: 121

QUESTÃO 6:

a) Podemos dispor os seis amigos nas poltronas de $6! = 720$ modos. Com Daniel e Laura juntos temos $5! \cdot 2! = 240$ modos (5! maneiras de permutarmos os quatro restantes com o bloco formado por Daniel e Laura e ainda 2! maneiras de permutarmos os dois dentro do bloco).
Assim, o número de modos com a condição de que Daniel e Laura não fiquem juntos em hipótese alguma é $720 - 240 = 480$.

Resposta: 480

b) Colocando um deles (Daniel ou Laura) no táxi pequeno, restam 4 possibilidades para a outra vaga; o outro táxi é preenchido pelo restante do grupo. Assim, temos:

$$2 \cdot 4 = 8 \text{ modos}$$

Resposta: 8